Higson coronaの不動点定理 (一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーの最近の話題とその応用)

深谷, 友宏

数理解析研究所講究録
第 1728 巻 2011 年 40-44

Higson corona の不動点定理

深谷友宏*

京都大学理学研究科数学教室

概要

無限遠境界を使った Baum-Connes 予想へのアプローチについて解説する．また Higson コロナ上のアーベル群の作用に関する不動点定理を紹介する．

1 始めに

Novikov 予想とは，多様体の高次符号数がホモトピー不変量であるという予想である．以下に正確な主張を述べる．M を可微分多様体とし，その基本群を $\Gamma=\pi_1(M)$ とする．連続写像 $u\colon M\to B\Gamma$ とコホモロジー類 $x\in H^*(B\Gamma)$ に対し，高次符号数 $\mathrm{sign}_x(M,u)$ を次の式で定める：

$$\mathrm{sign}_x(M,u)=\langle\mathcal{L}(M)\cup u^*(x),[M]\rangle.$$

ここで $\mathcal{L}(M)$ は M の L-class を，$[M]$ は M の基本類を表す．

予想 1.1 (Novikov 予想)．高次符号数 $\mathrm{sign}_x(M,u)$ は向きを保つホモトピーの元で不変である．

M が $4k$ 次元閉多様体で，$x=1\in H^0(B\Gamma)$ の場合は，Hirzeburch の符号数定理から，通常の符号数と一致して，確かに向きを保つホモトピーで不変となっている．詳しくは [3] を参照せよ．Novikov 予想は元々微分位相幾何学の問題であるが，それは基本群の問題に帰着され，作用素環や幾何学，トポロジーなど様々な分野にまたがる問題となった．その Novikov 予想の作用素環の世界での対応物が Baum-Connes 予想である．

予想 1.2. 可算群 Γ に対し，次の *analytical assembly map* は同型である：

$$\mu_*^\Gamma\colon K_*^\Gamma(E\Gamma)\to K_*(C_r^*(\Gamma)).$$

ここで $K_*^\Gamma(E\Gamma)$ は普遍 *proper G-space* $E\Gamma$ の同変 K-ホモロジーを表す．

μ_*^Γ が単射であれば，Γ を基本群に持つ多様体に対して Novikov 予想が成立する．Baum-Connes 予想に関して詳しくは [7] 等を参照せよ．一方で Novikov 予想の観点から見たとき，上述の Baum-Connes 予想は主張が強すぎる．一つの理由は，被約群 C^* 環 $C_r^*(\Gamma)$ が Γ の情報を十分に含みすぎているからである．John Roe は距離空間 X に対して，Roe algebra と呼ばれる C^* 環 $C^*(X)$ を導入して coarse Baum-Connes 予想を定式化した．

予想 1.3. *bounded geometry* を持つ距離空間 X に対し，次の *coarse assembly map* は同型である：

$$\mu_*\colon KX_*(X)\to K_*(C^*(X)). \tag{1}$$

ここで，$KX_*(X)$ は X の anti-Čech 系列 $\{\mathcal{U}_n\}$ を使って次のように定義される．

$$KX_*(X)=\varinjlim K_*(|\mathcal{U}_n|).$$

* Tomohiro Fukaya (tomo@math.kyoto-u.ac.jp)

詳しくは [2][4] を参照せよ．coarse assembley map が単射であれば，対応する Novikov 予想が成立する．さて，$D \in KX_*(X)$ に対し，$\mu_*(D)$ を調べるには，$K_*(C^*(X))$ の双対を構成して，$\mu_*(D)$ の値を調べれば良い．$C^*(X)$ はある代数 A の完備化として構成される．この完備化する以前の代数の K 群 $K_*(A)$ の双対は Connes による巡回コホモロジーを用いて代数的に構成できる．従ってその双対の定義域が，完備化された $K_*(C^*(X))$ まで伸びるかが重要な問題である．そこで Higson が着目したのが，距離空間の無限遠境界である．$\bar{X}$ を X のコンパクト化とし，その境界を $Y = \bar{X} \setminus X$ とする．Y が距離化可能で，coarse 幾何学の観点で十分適切な空間の場合に，Higson は自然な準同型写像 $b_Y\colon K_*(C^*(X)) \to K_{*+1}(Y)$ が存在する事を示した．このとき，$\alpha \in H^{*-1}(Y)$ との対 $\langle \mathrm{ch}_* b_Y(\mu_*(D)), \alpha \rangle$ が定義される．ここで ch_* はホモロジー Chern 指標である．この「coarse 幾何学の観点で十分適切な空間」を定式化する為に導入されたのが，次章で説明する Higson コロナである．

2 Higson コロナ

距離空間はその有界閉集合が常にコンパクトであるとき，固有であるという．X を固有距離空間とし，$\varphi\colon X \to \mathbb{C}$ を有界連続関数とする．$r > 0$ に対し，$V_r(\varphi)\colon X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を次で定める：

$$V_r(\varphi)(x) = \sup\{|\varphi(y) - \varphi(x)| : d(x, y) \leq r\}.$$

任意の r に対し，$V_r(\varphi)$ が無限遠で消えるとき，φ を Higson 関数と定義する．$C_h(X)$ で有界連続 Higson 関数の集合を表す．$C_h(X)$ は sup ノルムに関して完備であり，単位元を持つ可換 C^* 環である．Gelfand-Naimark の理論により，あるコンパクトハウスドルフ空間 hX が一意に存在して，$C(hX) \cong C_h(X)$ を満たす．また自然な埋め込み $i\colon X \to hX$ が存在して像は稠密である．そこで $i(X)$ を X と同一視して $X \subset hX$ と見なす．この hX を X の Higson コンパクト化と呼び，$\nu X = hX \setminus X$ を Higson コロナと呼ぶ．

距離化可能なコンパクト空間 Y と連続写像 $\sigma_Y\colon \nu X \to Y$ の組を，固有距離空間 X のコロナと呼ぶ．σ_Y によって hX に Y を張り合わせる事により，コンパクト Hausdorff 空間 $X_Y = hX \cup_{\sigma_Y} Y$ が得られる．必要があれば，Y の閉部分集合を考える事により X は X_Y の中で稠密であるとしてよい．したがって X_Y は X のコンパクト化である．C^* 環の言葉で表せば，X のコロナを定める事は $C_h(X)$ の可分な部分 C^* 環で $C_0(X)$ を含むものを定める事と同値である．次の命題が示すように，Higson コロナは Novikov 予想の研究において重要な対象である．

命題 2.1 (Higson). X のコロナ Y に対し，次の自然な準同型写像が存在する．

$$b_Y\colon K^*(C^*(X)) \to K_{*+1}(Y).$$

命題 2.2 (Weinberger). X が一様可縮空間であり，任意の $\beta \in H_c^*(X; \mathbb{Q})$ に対し，あるコロナ Y とある $\alpha \in H^{*-1}(Y; \mathbb{Q})$ が存在して $\partial\alpha = \beta$ が成立するなら，対応する *coarse assembly map (1)* は単射である．

証明. $0 \neq D \in K_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ とする．するとある $\beta \in H_c^*(X; \mathbb{Q})$ が存在して $\langle \mathrm{ch}_* D, \beta \rangle \neq 0$. 仮定よりある $\alpha \in H^{*-1}(Y; \mathbb{Q})$ が存在して，[5, Proposition 5.29] より，

$$\langle \mathrm{ch}_* b_Y(\mu_*(D)), \alpha \rangle = \langle \mathrm{ch}_* D, \beta \rangle \neq 0.$$

□

3 Higson コロナの性質：良い点，難しい点

Higson コロナは距離空間の coarse カテゴリーからコンパクトハウスドルフ空間の成すカテゴリーへの関手と見なせる．[5][6]．そこでまず coarse カテゴリーについて復習しよう．

X と Y を距離空間とし，$f\colon X \to Y$ を（連続とは限らない）写像とする．このとき：

1. Y の任意の有界集合 B に対し，その引き戻し $f^{-1}(B)$ が X の有界集合であるとき，f は**固有**であると定める．
2. 任意の $R > 0$ に対し，ある $S > 0$ が存在して各 $x, x' \in X$ に対し，$d(x, x') < R$ なら $d(f(x), f(x')) < S$ が成立するとき，f は **bornologous** であると定める．
3. f は固有かつ bornologous のとき，**coarse** であると定める．

次に 2 つの写像 $f, g\colon X \to Y$ を考える．ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $x \in X$ に対し，$d(f(x), g(x)) < C$ が成り立つとき，f と g は**近い**と定め，$f \simeq g$ と表す．二つの距離空間 X と Y は，2 つの coarse 写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ が存在して $g \circ f$ と $f \circ g$ がそれぞれ恒等写像と近いときに，coarse 同型であると定める．

命題 3.1. *coarse* 写像 $f\colon X \to Y$ は連続写像 $\nu f\colon \nu X \to \nu Y$ を誘導する．また二つの *coarse* 写像 $f, g\colon X \to Y$ が近ければ $\nu f = \nu g$ である．

系 3.2. X と Y が *coarse* 同型なら νX と νY は同相．

Higson コロナは coarse カテゴリーからコンパクトハウスドルフ空間への関手の中で最も普遍的な存在である．任意の位相空間に対して定義できる最も普遍的なコンパクト化である，Stone-Čech コンパクト化がそうであるように，Higson コンパクト化もまた非常に複雑な空間である．

命題 3.3. X を固有距離空間とする．X が非有界であるならば，νX は第二可算公理を満たさないコンパクトハウスドルフ空間である．したがって νX は距離化不可能である．さらに νX の濃度は $2^{2^{\aleph_0}}$ 以上である．すなわち連続体濃度より真に大きい．

空間を調べる一つの観点は，その上の変換を調べる事である．Higson コロナのような非常に複雑な空間ですら，その観点には意味がある．以下では距離空間への群作用と，それが Higson コロナ上へ引き起こす作用の関係について述べる．詳しくは [1] を参照せよ．

4 coarse 作用

X を距離空間とし，Γ を X に作用している有限生成群とする．Γ は左不変な語距離を用いて距離空間と見なす．

定義 4.1. 任意の $g \in \Gamma$ に対し，写像 $\Psi_g\colon X \to X\colon x \mapsto g \cdot x$ が *coarse* であるとき，Γ の X への作用は *coarse* であると定める．

定義 4.2. 点 $x_0 \in X$ に対し，軌道写像 $\Phi_{x_0}\colon \Gamma \to X$ を $g \mapsto g \cdot x_0$ で定める．軌道写像が *coarse* のとき，x_0 の軌道は *coarse* であると定める．

補題 4.3. Γ の自分自身への左からの作用は *coarse* 作用であり，任意の点の軌道は *coarse* である．

定義から coarse 作用は Higson コロナ上の連続な作用を誘導する．以下ではアーベル群 $\mathbb{Z}^k$ の作用を考える．

定理 4.4. $\mathbb{Z}^k$ の X への作用は *coarse* であり，ある点 $x \in X$ の軌道は *coarse* であるとする．このとき，$\mathbb{Z}^k$ の X への作用は不動点を持つ．

離散群 Γ が $\mathbb{Z}^k$ を部分群に持つとき，$\mathbb{Z}^k$ の Γ への自然な作用は定理 4.4 の仮定を満たす．Γ を双曲群とする．Γ の Higson コロナから，Γ の Gromov 境界への Γ-同変写像が存在する為に，次の系が得られる．

系 4.5. $\gamma \in \Gamma$ を双曲群 Γ の位数無限大の元とする．$\mathbb{Z}$ の Γ への作用 $(n, g) \to \gamma^n \cdot g$ は Γ の *Gromov* 境界への連続な作用を誘導し，その作用は不動点を持つ．

これは Gromov によって示された，双曲群に関する基本的で重要な事実である．

例 4.6. *wreath* 積 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は任意の自然数 n について $\mathbb{Z}^n$ を部分群に持つ（*[6]* の *135* ページ参照）．$\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ への作用は *coarse* であり，$\nu(\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z})$ 上に誘導された $\mathbb{Z}^n$ の作用は不動点を持つ．

一方で主定理は一般に非可換群の作用へは拡張できないことが分かっている．実際，次の例がある．

例 4.7. 自由群 F_2 の νF_2 への自然な作用は不動点を持たない．

5 coarse 不動点

定理 4.4 の応用として離散版 Brouwer 不動点定理が得られる．coarse 写像 $f\colon X \to X$ と点 $x \in X$ に対し，$\{f^n(x)\colon n \in \mathbb{N}\}$ が有界集合であるとき，x は f の coarse 不動点であると定める．一般に Γ が無限群で x が coarse 不動点であれば，軌道写像 $\Phi_x\colon \mathbb{N} \to X\colon n \to f^n(x)$ は固有ではない．以下に述べる二つの場合にはこの逆が成立する．

命題 5.1. X を任意の有界集合が有限集合であるような距離空間とする．点 x に対し，軌道写像 Φ_x が固有でなければ，x は *coarse* 不動点である．

命題 5.2. X を固有距離空間とし，$f\colon X \to X$ を等長写像とする．このとき点 x に対し，軌道写像 Φ_x が固有でなければ，x は *coarse* 不動点である．

証明. x の軌道写像 Φ_x が固有でないと仮定する．するとある有界集合 $D \subset X$ が存在して $\{n \in \mathbb{N} : n \cdot x_0 \in D\}$ は無限集合である．$K = B(D,1) \cap \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$．とおく．ここで $B(D,1) = \{x \in X : d(x, D) \leq 1\}$ である．f は等長作用なので，K 上の点 $x_1, \cdots, x_N$ と非負整数 $T_1, \ldots, T_N$ が存在して

$$\overline{K} \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 1)$$

かつ任意の点 $x \in B(x_j, 1)$ に対し，$f^{T_j}(x) \in \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, 1)$．である．この K の分解を用いて，x の軌道が有界である事を示せる． □

一方で等長写像の場合，軌道写像は常に bornologous である事が分かる．

補題 5.3. X を固有距離空間とし，$f\colon X \to X$ を等長写像とする．このとき任意の点に対し，その軌道写像は *bornologous* である．

証明. 任意の点 $x \in X$ に対し，$L = d(f(x), x)$ とおく．すると全ての非負整数 $i > 0$ に対し，$d(f^{i+1}(x), f^i(x)) = L$ である．したがって任意の整数の組 $m \geq n \geq 0$ に対し，

$$\begin{aligned} d(\Phi_x(m), \Phi_x(n)) &= d(f^m(x), f^n(x)) \\ &\leq \sum_{i=n}^{m-1} d(f^{i+1}(x), f^i(x)) = L|m-n|. \end{aligned}$$

したがって Φ_x は bornologous. □

系 5.4 (離散版 Brouwer 不動点定理). $f\colon X \to X$ を等長写像とする．このとき f は X 上に *coarse* 不動点を持つか，*Higson* コロナ νX 上に不動点を持つ．

例 5.5. 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の *Gromov* 境界は S^1 であり，コンパクト化 $\mathbb{H}^2 \cup S^1$ は球体 D^2 と同相である．ゆえに *Brouwer* 不動点定理より連続写像 $f\colon \mathbb{H}^2 \cup S^1 \to \mathbb{H}^2 \cup S^1$ は不動点を持つ．一方 Γ を種数 2 以上の閉 *Riemann* 面の基本群とする．Γ は $\mathbb{H}^2$ と擬等長であることからその *Gromov* 境界も S^1 である．$g\colon \Gamma \to \Gamma$ を等長写像とするとき，離散版 *Brouwer* 不動点定理より g は Γ 上に *coarse* 不動点を持つか，$\partial\Gamma = S^1$ 上に不動点を持つ．

系 5.4 にて，f が等長であるという仮定は外せない．実際次 [1, Section 4] にて，固有距離空間 X と coarse 写像 $f\colon X \to X$ で次の 2 つの条件を満たすものを構成した．

1. f は coarse 不動点を持たない．
2. 連続写像 νf は Higson コロナ νX 上に不動点を持たない．

参考文献

[1] Tomohiro Fukaya, *Coarse dynamics and fixed point theorem*, To be appeard in Nagoya Math. J.

[2] Nigel Higson and John Roe, *On the coarse Baum-Connes conjecture*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 2 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 227, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 227–254. MR 1388312 (97f:58127)

[3] Matthias Kreck and Wolfgang Lück, *The Novikov conjecture*, Oberwolfach Seminars, vol. 33, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005, Geometry and algebra. MR 2117411 (2005i:19003)

[4] John Roe, *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **104** (1993), no. 497, x+90. MR MR1147350 (94a:58193)

[5] ———, *Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 90, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1996. MR MR1399087 (97h:58155)

[6] ———, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR MR2007488 (2004g:53050)

[7] Alain Valette, *Introduction to the Baum-Connes conjecture*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, From notes taken by Indira Chatterji, With an appendix by Guido Mislin. MR 1907596 (2003f:58047)